$(x,y)\to(0,0)$

٤) إذا كان الدالة المعرفة بالشكل :

$$f: R^2-(0,0)\to R$$

$$(x,y)\to f(x,y)=\frac{\sin x\cdot y}{x^2+y^2}$$

ادرس وجود النهاية $f(x,y)$ عندما $(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

الحل: إذا أخذنا المتتاليتين في R $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$

$$(x_n',y_n')=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{5}$$

وبما أن النهايتان غير متساويتان وبالتالي حسب نتيجة سابقة بالنهاية غير موجودة.

تمرين: [٣] ليكن n عدد صحيحاً موجباً أكبر من 1 ولتكن $a_1,a_2,\ldots a_n,b$ اعداد حقيقية غير سالبة و f دالة الحقيقية المعرفة على المجموعة $A=R_+^n-\{(0,0,\ldots,0)\}$ بالشكل التالي

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{x_1^{a_1},x_2^{a_2}\ldots,x_n^{a_n}}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^b}$$

أ- أثبت أنه إذا كان $a_1+a_2+\ldots+a_n>2b$ فإن $\lim_{(x_1,x_2,\ldots x_n)\to(0,0,\ldots,0)} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$

ب- أثبت أن إذا كان $a_1+a_2+\cdots+a_n=2b$ فإن ليس لـ f نهاية نحو النقطة $(0,0,\cdots,0)$ وأن $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leq 1$.

ج- أثبت أن إذا كانت $a_1+a_2+\cdots+a_n<2b$ فإن ليس لـ f نهاية نحو النقطة $(0,0,\cdots,0)$ وإن f ليست محدودة في جوار هذه النقطة.

الحل: نلاحظ أنه إذا كان $(x_1,x_2,\cdots x_n)\in A$ فعندئذ:

$$0\leq f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leq \frac{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}{\sup\limits_{1\leq i\leq n}(x_i)^{2b}}\leq \frac{(\sup(x_i))^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{(\sup x_i)^{2b}}$$

$$=(\sup x_i)^{a_1+a_2+\cdots a_n-2b}$$

والآن نريد مناقشة (أ، ب، ج)

أ- إذا كان $a_1+a_2+\cdots+a_n>2b$ فإنه

$$\lim_{\substack{x_i\to 0 \\ (x_1,x_2,\cdots x_n)\to(0,0,\cdots 0)}}(\sup x_i)^{a_1+a_2+\cdots+a_n-2b}=0$$

وهذا يؤدي أنه

$$\lim_{(x_1,x_2,\cdots x_n)\to(0,0,\cdots 0)} f(x_1,x_2,\cdots x_n)=0$$

لأنه $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leq(\sup x_i)^{a_1+a_2+\cdots+a_n-2b}$ وبما أن الكسرة تسعى نحو الصفر والتالي الصغرة تسعى نحو الصفر.

ب- $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=2b$ فإن $0\leq f(x_1,x_2,\cdots x_n)\leq 1$

والآن نريد إثبات أنه f ليس لها نهاية.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x,\cdots,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{(n x^2)^b}=$$

/ /

$$= \frac{1}{n^b} \cdot \lim_{x \to 0} x^{a_1+a_2+\cdots+a_n-2b}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, x, \cdots x) = \frac{1}{n^b}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0, \cdots, 0) = \lim \frac{0}{x^{2b}} = 0$$

وبما أن النهايتين غير متساويتين ، وإن كلا من المتتاليتين :

$$\lim_{x \to 0} (x, 0, \cdots 0) = (0, 0, \cdots 0) ; \lim_{x \to 0} (x, x \cdots, x) = (0, 0, \cdots 0)$$

تتجهان إلى نفس النهاية فحسب نتيجة سابقة ليست للدالة نهاية في النقطة $(0, 0, \cdots 0)$

ج- إذا كان $a_1+a_2+\cdots+a_n < 2b$ فإن :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x, x, \cdots x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{(nx^2)^b} = \frac{1}{n^b} \lim \frac{1}{x^{2b-a_1-a_2-\cdots-a_n}}$$

$$= \frac{1}{n^b} \cdot \infty = \infty$$

ليست لـ f نهاية في النقطة $(0, \cdots 0, 0)$ وأن f ليست محدودة في جوار هذه النقطة

مثال 4 : إذا كانت f الدالة المعرفة بالشكل :

$$f : \mathbb{R}^2 - (0,0) \longrightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$$

ادرس وجود النهاية $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$

الحل :

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} \overset{\text{أوبيتال}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} e^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

وبما أن النهايتين مختلفتين رغم أن كلا من المتتاليتين

$$\lim_{x\to 0}(x,x) = (0,0) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}(x,0) = (0,0)$$

تنتهيان إلى نفس النقطة حسب مبرهنة أو نتيجة سابقة فليس للدالة نهاية.

مثال 5: إذا كانت f الدالة الحقيقية المعرفة على $\{\mathbb{R}^3 - (0,0,0)\}$ بالشكل التالي:

$$f(x,y,z) = x^3 y^2 z^2 \ln(x^2+y^2+z^2)$$

أثبت $\lim_{(x,z)} f(x,y,z) = 0$

الحل:

$$f(x,y,z) = \frac{x^3 y^2 z^2}{(x^2+y^2+z^2)} (x^2+y^2+z^2) \ln(x^2+y^2+z^2)$$

لأنه حسب تمرين (3) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$

وأن $a_1+a_2+\dots+a_2 > 2b$ $\quad 2+2+2 > 2.1$ فإن النهاية تساوي الصفر.

كما أن $\lim_{u\to 0} u \ln u = 0$ لأنه حسب لوبيتال $\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -u = 0$

وأن نهاية الجداء يساوي جداء النهايات فإن نهاية:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{(x^2+y^2+z^2)} \cdot \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2)\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$= 0 \cdot 0 = 0$$

★ **استمرار الدوال:**

تعريف: ليكن (E, d_E) , (F, d_F) فضائين متريين و f تطبيقاً معرفاً على E ويأخذ القيم في F و a نقطة من E فنقول عن التطبيق f أنه مستمر في النقطة a إذا قابل أي عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان $x \in E$ و $d_E(x, a) < \delta$ فإن $d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$ وإذا كان f مستمراً في كل نقطة من مجموعة جزئية A من E فنقول أنه مستمر على E.

نتائج: [1] نستنتج من التعريف الأخير ومن تعريف النهاية أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون التطبيق f مستمراً في النقطة a في E هو أن يكون:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

[2] نستنتج من التعريف الأخير ومن المبرهنة ما قبل الأخيرة إن الشرط اللازم والكافي حتى يكون التطبيق f مستمراً في النقطة a من E هو أن تتقارب المتتالية $f(x_n)$ من $f(a)$ وذلك أياً كانت المتتالية x_n في E والمتقاربة من a.

مبرهنة:
لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B على الترتيب من R^n ولتكن a نقطة من تقاطع $A \cap B$، إذا كانت الدالتين f و g مستمرتين في النقطة a فإن كلاً من $g+f$ ، $f.g$ دالة مستمرة في a وإذا كان $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة أيضاً في النقطة a. **البرهان:** ينتج مباشرة من المبرهنة الأخيرة "مع النهايات"

أمثلة: الدوال الإ.

$$x_i : R^n \to R \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$(a_1, a_2, \ldots a_n) \to x_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$$

الحل: لتكن $a = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in R^n$ نقطة اختيارية.

/ /

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon \; ; \; \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2$

$$\sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2) + \cdots + (x_n - a_n)}$$

$$\Rightarrow d(x_i(x); x_i(a)) = |x_i(x) - x_i(a)| = |x_i - a_i|$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{محققة دوماً}$$

$$= d_2(x, a) < \delta_\varepsilon = \varepsilon$$

أي أن الدالة x_i مستمرة في النقطة الاختيارية a في $\mathbb{R}^n$ وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}^n$.

تمرين 2: إذا كانت f الدالة الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}^2$ بالشكل التالي:

$$(x, y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cdot \cos y}{x^2 + y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

إن الدالة f مستمرة في النقطة $(0,0)$ وذلك حسب التمرين $\overline{II}$ في النهايات فإن النهاية

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

تمرين 3: إذا كانت f الدالة الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}^2$ بالشكل التالي:

$$(x, y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x \cdot y}{x^2 + y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

وحسب التمرين $\overline{2}$ ليس هنالك نهاية وبالتالي الدالة f ليست مستمرة في النقطة $(0,0)$

/ /

تمرين 4: إذا كانت الدالة الحقيقية المعرفة على R^2 بالشكل التالي:

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot y^2 \cdot \ln(x^2+y^2) & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

وحسب تمرين (5) فإن نهايتها تساوي الصفر وصورتها تساوي الصفر وبالتالي مستمرة في النقطة $(0,0)$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة

$$f : D \longrightarrow R^m \quad ; \quad D \subseteq R^n$$

$$x \longrightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_m(x))$$

حتى تكون هذه الدالة مستمرة في النقطة x_0 من D هو أن تكون الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

$$x \to f_i(x) \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots m$$

مستمرة في النقطة x_0 "أي يجب أن تكون كل دالة من هذه الدوال مستمرة في x_0"

البرهان: لزوم الشرط: لنفرض أن f مستمرة في النقطة x_0 عندئذٍ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي يوجد δ بحيث إذا كان $x \in D$ و $d(x, x_0) < \delta$

فإن حسب تعريف الاستمرار $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

أي أن $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f_i(x_0))^2} < \varepsilon$ ولكن

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f_i(x_0))^2} < \varepsilon$$

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) = |f_i(x) - f_i(x)| < \varepsilon \qquad ; i = 1, 2, \ldots\ldots m$$

ونستنتج أن الدوال الحقيقية f_i ، $i = 1, \ldots\ldots m$ مستمرة في النقطة x_0

كفاية الشرط: إن الدوال f_i " $i = 1, \ldots, m$ " مستمرة في النقطة x_0 عندئذٍ يقابل كل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي δ بحيث إذا كان $d(x, x_0) < \delta$ فإن

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) = |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

حيث $i = 1, \ldots, m$

إن المسافة:

$$d_2(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f(x_0))^2} < \sqrt{\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{m} + \frac{\varepsilon^2}{m} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{m}}_{m \text{ مرة}}}$$

$$< \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

ومنه ينتج أن الدالة f مستمرة في النقطة x_0